平成２７年度　入学者選抜試験問題

一般入学試験

# 数　学　(70分)

## I　注意事項

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　この問題冊子は16ページあります。ただし，出題ページは下記のとおりです。
　**4，6，8，10，12ページ**

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督員に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**
　**受験番号を記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄**
　**氏名・フリガナを記入**しなさい。

5　試験開始後30分間および試験終了前５分間は退出できません。

6　この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。**この問題冊子は試験終了後回収します。**

## II　解答上の注意

1　**「解答上の注意」が，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。**

| 受　験　番　号 | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |

**1** 次の問いに答えなさい。

(1) 定数 $a$ を正の実数とする。関数

$$f(\theta) = 4\sin 2\theta + 6\cos^2\theta + 4a(\sin\theta + 2\cos\theta) + a^2 + 1$$

の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ における最大値を $M$，最小値を $m$ とする。

$t = \sin\theta + 2\cos\theta$ とおく。$f(\theta)$ を $t$ を用いて表すと

$$f(\theta) = \boxed{\text{ア}}\,t^2 + 4at + a^2 - \boxed{\text{イ}}$$

である。

$M = a^2 + \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\,a + \boxed{\text{オ}}$ であり，これを与える $\theta$ の値を $\theta_0$ とすると，$\tan\theta_0 = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

また，$M - m = 14$ となる $a$ の値は，$a = \sqrt{\boxed{\text{ク}}} - \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(2) 定数 $m$ を正の整数とする。

$xy$ 平面上に 2 点 A(21, 0)，B(0, $m$) がある。点 (1, 0) と直線 AB との距離を $d$ とすると

$$d = \frac{\boxed{\text{コサ}}\,m}{\sqrt{m^2 + \boxed{\text{シスセ}}}}$$

である。

$d$ が有理数となるような $m$ の値は全部で $\boxed{\text{ソ}}$ 個あり，そのうち $m$ の値が最大のものは $m = \boxed{\text{タチツ}}$ である。

また，$d$ が整数となるとき，$m = \boxed{\text{テト}}$，$d = \boxed{\text{ナニ}}$ である。

**2** 正 $n$ 角形 $P_1P_2P_3 \cdots P_n$($n$ は 4 以上の整数)を $K$ とする。

$K$ の頂点と各辺の中点の合計 $2n$ 個の点から異なる 3 点を選び，それらを線分で結んでできる図形を $T$ とする。

(ただし，$K$ の 1 つの頂点とそれに隣接する中点の一方を結ぶ線分を 1 辺とする三角形，例えば辺 $P_1P_2$ の中点を $M_1$ として，三角形 $P_1M_1P_3$ なども「$K$ と辺を共有する三角形」とする。)

(1) $n = 5$ とする。

$T$ が三角形となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

$T$ が二等辺三角形となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

$T$ が $K$ と辺を共有しない三角形となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(2) $T$ が三角形となる確率は

$$\frac{\boxed{\text{コ}}\,n^2 - \boxed{\text{サ}}\,n - \boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}\left(\boxed{\text{セ}}\,n - \boxed{\text{ソ}}\right)\left(n - \boxed{\text{タ}}\right)}$$

である。

$T$ が $K$ と辺を共有しない三角形となる確率は

$$\frac{\boxed{\text{チ}}\,n^2 - \boxed{\text{ツテ}}\,n + \boxed{\text{トナ}}}{\left(\boxed{\text{セ}}\,n - \boxed{\text{ソ}}\right)\left(n - \boxed{\text{タ}}\right)}$$

である。

**3**　$a$，$b$ を実数の定数とする。O を原点とする座標空間内に 3 点 A (1，2，0)，B (2，0，4)，C ($a$，$b$，1) がある。

三角形 OAB において，点 O から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB の交点を H とする。点 H の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

である。

点 A から直線 OB に下ろした垂線と線分 OH の交点を K とする。点 K の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}},\ \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},\ \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\right)$$

である。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に垂直で，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直であるとする。このとき

$$a = \boxed{\text{セソ}},\quad b = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。以下で，$a$，$b$ はこの値であるとする。

線分 CK 上に $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直になるように点 L をとるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \left(\boxed{\text{ツ}},\ \boxed{\text{テ}},\ \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\right)$$

である。そのとき，$\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に垂直である。

平面 OAB において，三角形 KAB の外接円の周上に点 P をとるとき，線分 LP の長さの最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

**4** $xy$ 平面上に直線 $l : y = \frac{1}{2}x$ がある。

自然数 $n$ に対して，この平面上に，正方形 $A_nB_nC_nD_n$ を次のように定める。

$$\begin{cases} A_1\left(\frac{1}{3},\ 0\right) \\ \text{正方形の頂点は時計回りに } A_n,\ B_n,\ C_n,\ D_n \text{ とする。} \\ \text{頂点 } A_n,\ D_n \text{ は } x \text{ 軸上にあり，頂点 } B_n \text{ は直線 } l \text{ 上にある。} \\ \text{頂点 } A_n \text{ の } x \text{ 座標は頂点 } D_n \text{ の } x \text{ 座標より小さい。} \\ \text{頂点 } D_n \text{ を頂点 } A_{n+1} \text{ とする。} \end{cases}$$

頂点 $A_n$ の $x$ 座標を $x_n$，正方形 $A_nB_nC_nD_n$ の面積を $S_n$ とする。

(1) 正方形 $A_nB_nC_nD_n$ の 1 辺の長さは $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x_n$ である。

また，正方形 $A_nB_nC_nD_n$ の対角線の交点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}x_n,\ \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x_n\right)$

であるから，すべての自然数 $n$ に対して正方形 $A_nB_nC_nD_n$ の対角線の交点は

直線 $y = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}x$ 上にある。

(2) $x_{n+1}$ を $x_n$ で表すと $x_{n+1} = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}x_n$ である。よって $x_n = \dfrac{3^{\boxed{\text{サ}}}}{2^{\boxed{\text{シ}}}}$ である。

ただし，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ には，次の ①～⑥ の中から最も適切なものをそれぞれ一つ選ぶこと。

① $-n-1$　② $-n$　③ $n-2$　④ $n-1$　⑤ $n$　⑥ $n+1$

(3) $T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$ とおく。$T_n > 1$ となる最小の $n$ は $\boxed{\text{ス}}$ である。

**5** $x > -1$ で定義された関数 $f(x)$ は，等式

$$(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt = \log(x+1)+x-1$$

を満たしている。

(1) このとき $f(0) =$ $\boxed{\text{アイ}}$ であり，さらに

$$f'(x) = \frac{x+\boxed{\text{ウ}}}{\left(x+\boxed{\text{エ}}\right)^{\boxed{\text{オ}}}}$$

である。

(2) これをもとに $f(x)$ を求めると $f(x) =$ $\boxed{\text{カ}}$ $-$ $\boxed{\text{キ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ には，次の ①～⑥ の中から最も適切なものをそれぞれ一つ選ぶこと。なお，同じ選択肢を選んでもよいものとする。

① $\log x$　② $\log(x+1)$　③ $x\log(x+1)$　④ $\frac{1}{x}$　⑤ $\frac{1}{x+1}$　⑥ $\frac{x}{x+1}$

(3) $a > 0$ とする。関数 $g(x) = \log x$ について，区間 $[a,\ a+1]$ で平均値の定理を用いると，$g(a+1) - g(a) =$ $\boxed{\text{ク}}$ となる実数の定数 $c$ が区間 $\boxed{\text{ケ}}$ に存在する。これを用いると自然数 $m$ に対する $f(e^m)$ と $m$ の大小は $f(e^m)$ $\boxed{\text{コ}}$ $m$ となることがわかる。ただし，$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ には，次の選択肢 I の ①～⑦ の中から，$\boxed{\text{コ}}$ には，選択肢 II の ①～③ の中から最も適切なものをそれぞれ一つずつ選ぶこと。

選択肢 I

① $c$　② $c+1$　③ $\frac{1}{c}$　④ $\frac{1}{c+1}$　⑤ $\log c$　⑥ $[a,\ a+1]$　⑦ $(a,\ a+1)$

選択肢 II

① $<$　② $>$　③ $=$

(4) さらに

$$\int_0^{e^x-1} f(t)dt = \left(x-\boxed{\text{サ}}\right)\left(e^x-\boxed{\text{シ}}\right)$$

となるので，自然数 $n$ に対して $p(n) = e^{\frac{2}{3n}}-1$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{p(n)} f(t)dt = \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。