数　　学

平成27年度

入学試験問題

受験番号	

1. 注意事項

（1）　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

（2）　この問題冊子は14ページあります。

試験中に，問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気づいた場合は，手を挙げて，監督者に知らせなさい。

（3）　問題冊子のどのページも切り離してはいけません。

（4）　問題冊子の表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。

（5）　解答用紙には，氏名，受験番号の記入欄および受験番号のマーク欄があるので，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。

（6）　**計算機能をもつ時計，計算器具などの使用は禁止します。使用している場合は不正行為とみなします。**

（7）　試験終了後，解答用紙はもちろん，問題冊子も持ち帰ってはいけません。

2. 解答上の注意

解答上の注意は，裏表紙にも記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。またマークシート左下に記載してある「注意事項」も読んでおきなさい。

（1）　問題は $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ の3問あります。

（2）　各問題文中の $\boxed{ア}$，$\boxed{イウ}$ などの $\boxed{}$ には，数値または符号（＋，－）が入ります。これらを次の方法で，解答用紙の指定欄に，解答しなさい。

裏表紙につづく

解答を始めるまえに，つぎの**解答上の注意(つづき)**を読みなさい。

解答上の注意(つづき)

(i) **分数の形の解答枠に，整数の解答をしたいときは，分母が 1 の分数の形になるように答えなさい。**たとえば，$\dfrac{\boxed{ヤ}}{\boxed{ユ}}$ の解答枠に 2 と答えたいときは，$\dfrac{2}{1}$ と答えなさい。

(ii) 解答枠 $\boxed{}$ に，**解答枠のけた数より少ないけた数の整数を解答したいときは，数字が右づめで，その前を 0 でうめるような形で答えなさい。**たとえば，$\boxed{ヨワ}$ の解答枠に 2 と答えたいときは，0 2 と答えなさい。**ヨ**の 0 をマークしないままにしておくと，間違いになります！

(解答上の注意終)

1 a，b を実数とする。x の整式 $f(x)$ を

$$f(x)=x^4-x^3-3ax^2+3(a+b)x-3b$$

とし，$y=f(x)$ のグラフを G とする。

(1) a，b の値にかかわらず，グラフ G は点 $\left(\boxed{ア},\ \boxed{イ}\right)$ を通る。

(2) 整式 $f(x)$ を因数分解すると

$$f(x)=\left(x-\boxed{ウ}\right)\left(x^3-\boxed{エ}\,ax+\boxed{オ}\,b\right)$$

となる。

（3） $a=4$ とし，整式 $f(x)$ は $(x-c)^2$ で割り切れるとする。このとき，

$c=-\boxed{カ}$ のとき，$b=-\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$ であり，

$c=\boxed{コ}$ のとき，$b=\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}$ である。また，

$c=\boxed{セ}$ のとき，$b=\dfrac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チ}}$ である。

ただし，$\boxed{コ}<\boxed{セ}$ とする。

（4） a，b を共に正の整数とし，グラフ G が x 軸と異なる 4 点で交わるとき，

$$b^2<\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}a^{\boxed{ト}}$$

が成り立つ。

（5） 2 つのサイコロを投げて出る目の数をそれぞれ，a，b とするとき，グラフ G が x 軸と異なる 4 点で交わる確率は

$$\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニヌ}}$$

である。

2 座標平面上の 2 つの直線 l, m を

$$l: \quad y = \frac{4}{3}x + 4$$

$$m: \quad y = -\frac{3}{4}x + 9$$

とする。l と m の交点を A とし，直線 l と x 軸の交点を B とする。原点を O とし，∠ABO の 2 等分線を k とする。2 つの直線 k と m の交点を C とする。三角形 ABC の外接円と x 軸との交点のうち，B と異なる点を D とする。線分 BC と線分 AD の交点を E とする。直線 m と x 軸の交点を F とする。

(1) 直線 k の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

(2) $\mathrm{AB} = \boxed{\text{オカ}}$, $\mathrm{BC} = \dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$, $\mathrm{CA} = \dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$

である。

また，三角形 ABC の外接円の中心の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}, \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\right)$

である。

(3)　$\angle \mathrm{BCD} = \alpha$，$\angle \mathrm{ADC} = \beta$ とすると，

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}, \qquad \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}}$$

である。

(4)　$\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{CE}} = \boxed{\text{ニ}}$ である。

(5)　$\angle \mathrm{AFE} = \theta$ とすると，

$$\tan\theta = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$$

である。

3 e を自然対数の底とする。

(1)

(i) $y = e^x$ のグラフ上の点のうち，点 $(1, 0)$ との距離が最小となる点の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ である。

(ii) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = \boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}\,e^{-1}$ である。

(iii) $\displaystyle\int x^2e^{-x}dx = -e^{-x}\left(x^2 + \boxed{\text{オ}}\,x + \boxed{\text{カ}}\right) + C$ である。ここで，C は積分定数である。

(2) $r > 0$ とし，

$$f(x) = xe^{-x} + r, \qquad g(x) = \sqrt{r^2 - (x-1)^2} + e^{-1}$$

とする。 $1 - r \leqq x \leqq 1$ を満たす任意の x に対して $f'(x) - g'(x) \leqq 0$ となる r の最大値を r_0 とする。

(i) $f'(x) - g'(x)$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{r^2-(x-1)^2}}\left(e^{-x}\sqrt{r^2-(x-1)^2}\ \boxed{\text{キ}}\ \boxed{\text{ク}}\right)$$

が成り立つ。ここで，$\boxed{\text{キ}}$ は符号＋，－のいずれかである。

(ii) $r_0 = \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(iii) $r = r_0$ のとき，$f(x) - g(x)$ の $1 - r \leqq x \leqq 1$ の範囲における最小値は $\boxed{\text{コ}}$ である。

(iv)　$r = r_0$ とする。$y = f(x)$ のグラフ，$y = g(x)$ のグラフ，および，y 軸で囲まれた部分の面積は

$$\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}} + \sqrt{\boxed{ス}} - \boxed{セ}\, e^{-1} - \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\pi$$

である。

(v)　$r = r_0$ とする。$y = f(x)$ のグラフと x 軸ではさまれた部分のうち，$0 \leqq x \leqq 1$ の部分を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積は

$$\pi\left(\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}} + \boxed{テ}\sqrt{2} - \boxed{ト}\sqrt{2}\, e^{-1} - \frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}} e^{-2}\right)$$

である。

計　算　用　紙

問題訂正

p. 2

1 (4)

訂正前の下線部分を，訂正後の下線部分のように訂正します。

訂正前

a，b を共に正の整数とし，グラフ G が x 軸と異なる 4 点で交わるとき，

$$b^2 < \frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}} a^{\boxed{ト}}$$

が成り立つ。

訂正後

a，b を共に正の整数とするとき，グラフ G が x 軸と異なる 4 点で交わるための必要十分条件は

$$b^2 < \frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}} a^{\boxed{ト}}$$

である。