

数 学 (70分)

I 注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は16ページあります。ただし、出題ページは下記のとおりです。
4, 6, 8, 10, 12ページ
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を挙げて監督員に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 受験番号欄
受験番号を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
 - ② 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
- 5 試験開始後30分間および試験終了前5分間は退出できません。
- 6 この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。この問題冊子は試験終了後回収します。

II 解答上の注意

- 1 「解答上の注意」が、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

受 験 番 号			

1 次の問いに答えなさい。

(1) m を実数の定数とする。 x についての 2 つの 2 次不等式

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \quad \cdots\cdots\text{①}$$

$$x^2 - 2mx - 8m^2 < 0 \quad \cdots\cdots\text{②}$$

を考える。

①の解は

$$\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}$$

である。

①を満たすすべての実数が②を満たすような m の値の範囲は

$$m \leq \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}, \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \leq m$$

である。

また、①、②をともに満たす実数 x が存在しないような m の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \leq m \leq \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である。

(2) 4 進法で表された $123_{(4)}$ を 10 進法で表すと、 $\boxed{\text{スセ}}$ である。

整数 n を 4 進法で表したとき、3 桁になった。このとき、 n のとり得る値の範囲を 10 進法で表すと

$$\boxed{\text{ソタ}} \leq n \leq \boxed{\text{チツ}}$$

である。

10 進法で表された 3^{20} を 4 進法で表すと、その桁数は $\boxed{\text{テト}}$ である。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

2 袋の中に、1, 2, …, m (m は 2 以上の整数) の数字が書かれた球がそれぞれ n 個ずつ (n は正の整数), 合計 mn 個入っている。この袋の中から同時に 2 個の球を取り出す。

取り出した球に書かれている数字が k, l ($k \geq l$) のとき, $x = k, y = l$ とする。

(1) $m = 6, n = 3$ のとき, $x - y = 3$ となる確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

(2) $2(x - y) \geq m$ となる確率を p とする。

$m = 18, n = 3$ のとき, $p = \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

m が偶数, $n = 3$ のとき, $p = \frac{\boxed{\text{ク}} m + \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}} m - \boxed{\text{シ}}}$ である。

(3) $2(x - y) < m$ となる確率は, m が偶数のとき

$$\frac{\boxed{\text{ス}} mn - \boxed{\text{セ}} n - \boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}} (mn - \boxed{\text{チ}})}$$

である。

3 三角形 ABC について, $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 8$ とする。このとき

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \boxed{\text{アイ}}$$

である。∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とする。このとき

$$\vec{AD} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}} \vec{AB} + \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}} \vec{AC}$$

である。

また, 三角形 ABC の内接円の中心を I, 外接円の中心を O とすると

$$\vec{AI} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \vec{AB} + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \vec{AC}$$

$$\vec{AO} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}} \vec{AB} + \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}} \vec{AC}$$

である。

したがって

$$|\vec{OI}|^2 = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

三角形 ABC の外接円の周上を動く点 P と内接円の周上を動く点 Q があるとき, 線分 PQ の長さの最大値は

$$\frac{\boxed{\text{ニヌ}} + \sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}$$

である。

4 次の問いに答えなさい。ただし、チにはX～Zに入る言葉の組合せとして最も適切なものを、下の選択肢①～⑥のうちから一つ選びなさい。

複素数 a を $a = -7 + 4\sqrt{3}i$ とし、実数の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$a_n + 4\sqrt{3}b_n i = a^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。ただし、 i は虚数単位である。 a_n と b_n を a とその共役な複素数 \bar{a} で表すと

$$a_n = \frac{a^n + (\bar{a})^n}{\text{ア}}, \quad b_n = \frac{a^n - (\bar{a})^n}{\text{イ} \sqrt{\text{ウ}}} i$$

となるので、数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2} + \text{エオ} a_{n+1} + \text{カキ} a_n = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$b_{n+2} + \text{エオ} b_{n+1} + \text{カキ} b_n = 0 \quad \dots\dots ②$$

を満たす。これらを用いて、すべての自然数 n に対して

$$a_n \text{ と } b_n \text{ が互いに素な整数である} \quad \dots\dots (*)$$

ことを、数学的帰納法により証明する。

[1] $n = 1, 2$ のとき

$$a_1 = \text{クケ}, \quad b_1 = \text{コ}, \quad a_2 = \text{サ}, \quad b_2 = \text{シスセ}$$

であるから、 $(*)$ が成り立つ。

[2] $n = k, k + 1$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する。

まず①, ②より、 a_{k+2}, b_{k+2} は X である。ここで

$$a_n^2 + 48b_n^2 = \text{ソタ}^n \quad \dots\dots ③$$

がすべての自然数 n で成り立つ。ソタ が Y であるから、 a_{k+2}, b_{k+2} が Z と仮定すると③より、これら2数は ソタ の倍数でなければならない。ところが、このとき①, ②より a_{k+1}, b_{k+1} は ソタ の倍数となり、数学的帰納法の仮定と矛盾する。よって、 $n = k + 2$ のときも $(*)$ が成り立つ。

[1], [2]より、すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ。

チ の選択肢

	X	Y	Z		X	Y	Z
①	整数	素数	互いに素でない	②	整数	素数	互いに素である
③	素数	素数	互いに素でない	④	整数	整数	互いに素である
⑤	素数	整数	互いに素でない	⑥	素数	整数	互いに素である

5 xy 平面上の放物線 $y = x^2$ の $0 \leq x \leq 1$ に対応する部分の長さを L とする。 L の値を次のようにして求めよう。 L は定積分

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \boxed{\text{ア}}} x^2 dx$$

で定まる。この定積分を計算するために $x = \frac{e^t - e^{-t}}{4}$ として、置換積分を行う。

このとき

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{4}$$

であり

$$\sqrt{1 + \boxed{\text{ア}}} x^2 = \frac{e^t + e^{-t}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である。

また、 $\frac{e^t - e^{-t}}{4} = 1$ となる t の値を α とすると、 x が $0 \rightarrow 1$ と変化するとき、 t は

$\boxed{\text{ウ}} \rightarrow \alpha$ と変化するので、 L を定める定積分は

$$L = \frac{1}{\boxed{\text{エ}}} \int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\alpha} (e^t + e^{-t})^{\boxed{\text{オ}}} dt$$

となる。ここで $X = e^t$ とおくと、 X は 2 次方程式

$$X^2 - \boxed{\text{カ}} X - \boxed{\text{キ}} = 0$$

の解である。 $X > 0$ なので

$$X = \boxed{\text{ク}} + \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。これを用いて α の値を定め、 L の値を計算すると

$$L = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}} + \frac{1}{\boxed{\text{シ}}} \log(\boxed{\text{ス}} + \sqrt{\boxed{\text{セ}}})$$

である。

解答上の注意

解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークしなさい。

問題の文中の ア , イウ などには、特に指示がない限り、数字 (0~9)、符号 (-, ±), 自然対数の底 (e) のいずれかが入ります。ア, イ, ウ, …のの一つ一つが、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

なお、解答用紙に5つある 解答欄の左肩の数字は、それぞれ大問の番号を表します。

例1 アイウ に -83 と答えたいとき。

1	解 答 欄												
	-	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
ア	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
イ	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
ウ	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

分数形で解答する場合は、既約分数で答えなさい。符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $\frac{-4}{5}$ として答えなさい。

1	解 答 欄												
	-	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
エ	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
オ	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
カ	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>