28 M

数　　学

［注意事項］

1. 監督者の指示があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 問 Ⅰ，Ⅱ の解答はマークシートにマークし，問 Ⅲ の解答は専用の解答用紙に書くこと。
3. マークシート解答用紙は，コンピュータで処理するので，折り曲げたり汚したりしないこと。
4. マークシートに，氏名・受験番号を記入し，受験番号をマークする。マークがない場合や誤って記入した場合の答案は無効となる。また，問 Ⅲ の解答用紙にも受験番号・氏名を記入する。無記入の場合や受験番号を誤記入した場合はその答案は無効になる。

受験番号のマーク例（13015の場合）

受	験	番	号	
1	3	0	1	5
万位	千位	百位	十位	一位
	⓪	●	⓪	⓪
●	①	①	●	①
②	②	②	②	②
③	●	③	③	③
④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	●
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

5. 問 Ⅰ，Ⅱ において，マークするときは，HBまたはBの黒鉛筆を用いること。誤ってマークした場合には，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえで，新たにマークし直すこと。
6. マークで解答する場合は，下記の例に従い，正しくマークすること。

正しいマーク例

① ② ● ④ ⑤ ⑥

誤ったマーク例

① ② ③ ④ ⑤ ⑥	○をする
① ② ③ ④ ⑤ ⑥	∨をする
① ② ③ ④ ⑤ ⑥	完全にマークしない
① ② ③ ④ ⑤ ⑥	枠からはみだす

7. マークで解答する場合，$\boxed{}$ の中の文字は，それぞれ符号（－）または，数字1文字が対応している。例えば，$\boxed{アイ}$ の形の場合，－9から－1の整数または10から99の整数が入り得る。

－2の場合

ア	●	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖	⓪ ① ● ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

32の場合

ア	⊖	⓪ ① ② ● ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖	⓪ ① ● ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

I $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

(1) 正6面体の面に色を塗ることを考える。ただし，いずれの場合もすべての色が用いられ，回転で一致する塗り方は区別しない。

赤と青の2色を使った塗り方は，

1つの色を1面に，もう1つの色を5面に塗る場合が $\boxed{\text{ア}}$ 通り，

1つの色を2面に，もう1つの色を4面に塗る場合が $\boxed{\text{イ}}$ 通り，

2つの色をそれぞれ3面ずつに塗る場合が $\boxed{\text{ウ}}$ 通り，

計 $\boxed{\text{エ}}$ 通りある。

赤，青と黄の3色を使った塗り方は，

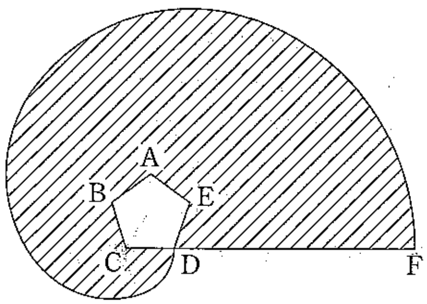
3つの色をそれぞれ1面−1面−4面に塗る場合が $\boxed{\text{オ}}$ 通り，

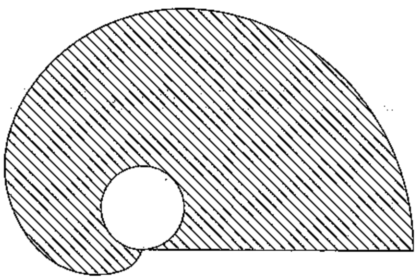
3つの色をそれぞれ1面−2面−3面に塗る場合が $\boxed{\text{カキ}}$ 通り，

3つの色を2面ずつに塗る場合が $\boxed{\text{ク}}$ 通り，

計 $\boxed{\text{ケコ}}$ 通りある。

(2)　下図のように周の長さ l の正五角形ABCDEがあり，点Dから長さ l の伸び縮みしない糸が反時計方向に巻き付けられている。この糸をたるまないように巻きほどき，糸の端FがCDの延長上に来るまで巻きほどく。動点Fは，はじめCを中心に，半径 $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}l$，中心角 $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$ の弧を描く。中心を変え，半径を変えながら巻きほどいていくが，それぞれの弧の中心角は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$ と変化しない。このとき，動点Fの動く距離は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}l\pi$ であり，糸が掃く面積は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}l^2\pi$ である。同様のことを正 n 角形で行い，糸の端の移動距離を $\dfrac{1}{n}(an+b)l\pi$ とし，糸の掃く面積を $\dfrac{1}{n^2}(cn^2+dn+e)l^2\pi$ とすると，$a=\boxed{\text{サ}}$，$c=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。周の長さ l の円に巻き付けられた糸を巻きほどくときの曲線(伸展曲線)については，上式でそれぞれ n の極限をとることにより求まる。糸の端の移動距離を $fl\pi$，糸の掃く面積を $gl^2\pi$ とすれば $f=\boxed{\text{セ}}$，$g=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ となることがわかる。





(3) $\boxed{\text{ケ}}$ はA群，$\boxed{\text{シ}}$ はB群より選択せよ。

$y=f(x)=x^3-x$ は，$x=\dfrac{\pm\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ で

極値 $\dfrac{\mp\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ を持つ。また，この2つの極値の間の任意の t に対して，この関数のグラフは直線 $y=t$ と3つの交点を持つ。この3つの交点の x 座標を小さい順に $p(t)<q(t)<r(t)$ とする。

$p(t)$，$q(t)$，$r(t)$ は t によらず，$p(t)+q(t)+r(t)=\boxed{\text{カ}}$，

$p(t)q(t)+q(t)r(t)+r(t)p(t)=\boxed{\text{キク}}$ を満たす。

このとき $\displaystyle\int_{p(t)}^{r(t)}|f(x)-t|\,dx$ は t の関数となる。これを $G(t)$ とおいたとき，導関数 $G'(t)$ について考えよう。t が微小量変化したときの様子(下図)より

$G'(t)=\boxed{\text{ケ}}$ となり，$p(t)$，$q(t)$，$r(t)$ の関係を考慮すると

$G'(t)=\boxed{\text{コサ}}\ \boxed{\text{シ}}$ となる。

以上の関係より，$G'(t)=1$ となるのは $t=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ のときである。

選択肢A

a) $(r(t)-q(t))+(q(t)-p(t))$

b) $(r(t)-q(t))^2+(q(t)-p(t))^2$

c) $(r(t)^2-q(t)^2)+(q(t)^2-p(t)^2)$

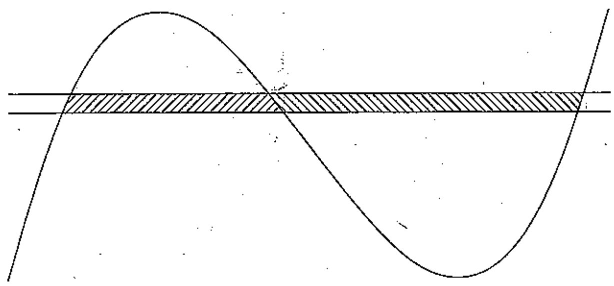
d) $(r(t)-q(t))-(q(t)-p(t))$

e) $(r(t)-q(t))^2-(q(t)-p(t))^2$

f) $(r(t)^2-q(t)^2)-(q(t)^2-p(t)^2)$

選択肢B

a) $p(t)$　b) $q(t)$　c) $r(t)$　d) $p(t)^2$　e) $q(t)^2$　f) $r(t)^2$



(4)　4 次関数$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$がある。ここでxの区間$[3,\ 6]$における関数$f(x-t)$の最大値を$g(t)$，最小値を$h(t)$とおく。

$g(t)$は$\alpha \leqq t \leqq \beta$で$g(t) = \dfrac{3}{2}$となり，

$t < \alpha$または$t > \beta$で$g(t) > \dfrac{3}{2}$であり，

$h(t)$は$\dfrac{3}{2} \leqq t \leqq \dfrac{15}{2}$で$h(t) = \dfrac{-57}{16}$で，

$t < \dfrac{3}{2}$または$t > \dfrac{15}{2}$で$h(t) > \dfrac{-57}{16}$であった。

このとき$a = \boxed{\text{ア}}$，$b = \dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$，$c = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，

$$\alpha = \boxed{\text{キ}} - \frac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}},$$

$$\beta = \boxed{\text{サ}} + \frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

Ⅱ $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。

正二十面体の体積を求めてみよう。

正二十面体の各面は正三角形であり，1つの頂点には5つの正三角形が集まっている。

まず，H を中心とする円に内接する正五角形 ABCDE について考える。

AC と BE の交点を I とすると，△IAB と△BCA を比較することにより，

$$\mathrm{AC}=\frac{\boxed{ア}+\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}\mathrm{AB}$$ となり，

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\boxed{エ}+\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$$ となることがわかる。これを用いて

$$\mathrm{AB}=\frac{\sqrt{\boxed{キク}-\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}}}{\boxed{サ}}\mathrm{AH}$$ が求まる。

次に，H を通り円 H を含む平面に垂直な直線上に FA = AB となるように F をとると，$\mathrm{FH}=\frac{\boxed{シス}+\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}\mathrm{AH}$ である。さらに FH の延長上に FO = AO となるように O をとると $\mathrm{HO}=\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}\mathrm{AH}$ であり，

$$\mathrm{FO}=\frac{\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}\mathrm{AH}$$ となる。

△FAB の重心を G とすると，

$$\mathrm{FG}=\frac{\sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナ}}\mathrm{AB}=\frac{\sqrt{\boxed{ニヌ}-\boxed{ネ}\sqrt{\boxed{ノ}}}}{\boxed{ハ}}\mathrm{AH}$$

となる。

このとき，正五角錐 ABCDEF は O を中心とする球に内接する正二十面体の一部である。

$$\mathrm{GO} = \frac{\boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}+\sqrt{\boxed{\text{ヘホ}}}}{\boxed{\text{マミ}}}\mathrm{AB}$$ となり，

正二十面体の表面積は $\boxed{\text{ム}}\sqrt{\boxed{\text{メ}}}\,\mathrm{AB}^2$ となるので

体積は $\dfrac{\boxed{\text{モヤ}}+\boxed{\text{ユ}}\sqrt{\boxed{\text{ヨ}}}}{\boxed{\text{ラリ}}}\mathrm{AB}^3$ とあらわすことができる。

Ⅲ 次の問いに答えよ。

(1) 任意の実数x，yに対して，つぎの不等式を証明せよ。

$$|x+y| \leqq |x|+|y|$$

(2) 三角形OPQに対して，辺OP上に点R，辺OQ上に点Sをとる。このとき，つぎの不等式を証明せよ。

$$\mathrm{PQ}+\mathrm{RS} \leqq \mathrm{PS}+\mathrm{QR}$$

(3) 平面上の任意の4点A，B，C，Dについて，つぎの不等式を証明せよ。

$$\mathrm{AB}+\mathrm{CD} \leqq \mathrm{AC}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$$

(4) (3)の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か述べよ。