2016年度入学試験問題（前期）

数　　学（問　題）

注　　意

1)　数学の問題冊子は４ページあり，問題はⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの４題である。

2)　別に解答用紙１枚があり，**解答はすべてこの解答用紙の指定欄に記入すること。**
指定欄以外への記入はすべて無効である。
計算や下書きは問題用紙の白紙・空白部分を利用して行うこと。

3)　**解答用紙の所定欄に受験番号を記入せよ。氏名を記入してはならない。**
解答用紙の※印の欄には何も記入してはならない。

4)　問題冊子，解答用紙はともに持ち出してはならない。

5)　途中退場または試験終了時には，解答が他の受験生の目に触れないよう，解答用紙の上に問題冊子を重ねて，監督者の許可を得た後に退出すること。

I　(1)〜(6)の $\boxed{}$ の中に，あてはまる数，角度，整式，不等式，記号，語句などを記入せよ。

(1)　次の式を因数分解せよ。

$$x(x+9)(x-4)(x-13)+2016=\boxed{\text{ア}}$$

(2)　5つの選択肢の中から正解2つを解答する問題があり，2つの正解をどちらも正しく選んだ場合にのみ得点が与えられる。次の(i)，(ii)において，与えられた条件以外は無作為に解答を選ぶとき，得点が得られる確率を求めよ。

(i)　2つの選択肢が誤っていることがわかっている場合 $\boxed{\text{イ}}$

(ii)　1つの選択肢が正解であることがわかっている場合 $\boxed{\text{ウ}}$

(3)　三角形ABCの辺AB上に $3\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす点Pを，辺BCの延長上に $2\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を満たす点Qをとる。ACとPQの交点Rについて，線分BRを $r:1$ に外分する点がAQ上に存在するとき，r の値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(4)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で定義される関数 $y=4\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)$ の値域は，$\boxed{\text{オ}}$ である。

(5)　次の2つの式の値を求め，$\boxed{\text{カ}}$ の指定欄にそれぞれ記入せよ。また，中央にはこれらの値の大小を評価して不等号記号を記入せよ。

$$A:\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}},\quad B:\log_3\frac{2}{3}+4\log_4\sqrt[4]{1024}-\frac{1}{2}\log_3 12$$

(6)　xy 平面上で，不等式 $|x+1|+|y|<2$ を満たす範囲をA，不等式 $|x-1|+|y|<2$ を満たす範囲を B とする。さらに，$|x|<4$ かつ $|y|<4$ を満たす範囲を C とするとき，$\overline{A\cup B}\cap C$ を満たす範囲を $\boxed{\text{キ}}$ に図示せよ。ただし，条件を満たす領域を斜線で明示することとし，境界上の点を含むときは実線を，境界上の点を含まないときは点線を用いて表記すること。

Ⅱ　a，m，k を正の定数とするとき，関数 $f(x)$ は次の条件を満たす関数である。

(i)　原点を通り，原点における接線の傾きが m である。

(ii)　$x = a$ における接線の傾きが m であり，この接線の y 軸切片が k である。

(1)　$f(x)$ の満たす条件を，a，m，k を用いた数式で表すと次のようになる。

(i)　$f(0) =$ $\boxed{\text{ク}}$ ，$f'(0) =$ $\boxed{\text{ケ}}$

(ii)　$f(a) =$ $\boxed{\text{コ}}$ ，$f'(a) =$ $\boxed{\text{サ}}$

(2)　$f(x)$ が(i)，(ii)の条件を満たす，最も次数の低い多項式である時，この多項式を a，m，k を用いて表すと，$f(x) =$ $\boxed{\text{シ}}$ となる。

(3)　n を正の定数とするとき，$y = f'(x)$ と直線 $y = n$ とは，$0 < x < a$ の範囲において，n が $\boxed{\text{ス}}$ の範囲で交点を持つ。n がこの範囲の値をとるとき，交点の x 座標の中で最も小さい値を α とし，$y = f'(x)$，直線 $y = n$，y 軸および直線 $x = \alpha$ で囲まれた部分の面積 $S(\alpha)$ を a，k，α を用いて表すと $S(\alpha) =$ $\boxed{\text{セ}}$ となる。

(4)　$S(\alpha)$ は α が $\boxed{\text{ソ}}$ のときに，最小値 $\boxed{\text{タ}}$ をとる。

Ⅲ　複素数の数列 $\{z_n\}$ について，次の条件によって定義する。

$z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$，$z_{n+1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right)z_n$　ただし，n は自然数とする。

(1)　複素数を $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ の極形式で表現すると，$z_2 = \boxed{\text{チ}}$ であり，$z_3 = \boxed{\text{ツ}}$ である。

(2)　z_n の一般項を n を用いた極形式で表すと，$z_n = \boxed{\text{テ}}$ となる。

(3)　$\sum_{i=1}^{n} |z_i| = \boxed{\text{ト}}$ である。

(4)　z_{3n} の一般項が $\boxed{\text{ナ}}$ であることを利用すると，$\sum_{i=1}^{n} z_{3i} = \boxed{\text{ニ}}$ が成り立つ。

Ⅳ　xy 平面上に，曲線 $C: x^2-(y-1)^2=1$，直線 $l_1: y=ax$，直線 $l_2: y=bx$ をとる。直線 l_1，直線 l_2 はどちらも曲線 C とそれぞれ 2 つの交点を持つとき，次の問に答えよ。

(1)　曲線 C と直線 l_1 との 2 つの交点の x 座標がどちらも正である場合，a のとり得る範囲は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。

(2)　a が上記の条件を満たすとき，曲線 C と直線 l_1 との交点を P，Q とする。原点 O と 2 つの交点との距離 OP と OQ について，OP・OQ を a を用いて表すと $\boxed{\text{ネ}}$ となる。

(3)　曲線 C と直線 l_2 との 2 つの交点の x 座標がどちらも負であるとき，この 2 つの交点を R，S とおく。P，Q，R，S の 4 つの点が同一円周上にあるとき，a と b との関係は $\boxed{\text{ノ}}$ である。

(4)　この円を，a を用いた xy 平面上の方程式で書き表すと $\boxed{\text{ハ}}$ となる。