

平成 28 年度

[数 学]

問題用紙

試験時間	90分
問題用紙	1 ~ 6頁

注意事項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙に落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても、または試験を放棄する場合でも、試験終了までは退場できない。
4. 机上には、受験票と筆記用具および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。
5. 筆記用具は鉛筆、シャープペンシル、消しゴムのみとする。
(コンパス、定規等は使用できない。)
6. 止むを得ず下敷を使用する場合は、監督者の許可を得ること。
7. 問題用紙および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
8. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
9. この問題用紙の余白は草稿等に自由に用いてよい。
10. 耳栓の使用はできない。
11. 携帯電話等の電源は必ず切り、鞆の中にしまうこと。
12. 質問、用便、中途退室など用件のある場合は、無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
13. 受験中不正行為があった場合は、試験の一切を無効とし、試験終了時間まで別室で待機を命じる。
14. 退室時は、試験問題および解答用紙を裏返しにすること。
15. 試験終了後、この問題用紙は持ち帰ること。

受験番号	
------	--

氏名	
----	--

[I] 次の各問いの答えのみを解答用紙に記せ。

問1 円に内接する四角形 ABCD において、 $AB = 1 + \sqrt{3}$, $BC = CD$, $DA = 2$, また $\angle DAB = 60^\circ$ である。四角形 ABCD の対角線の交点を P, $\angle BCD$ の二等分線と辺 AB との交点を Q, BD と CQ の交点を R とするとき、以下の各問いに答えよ。なお数値の分母は有理化すること。

- (1) 辺 BD の長さを求めよ。
- (2) $\angle ABD$ の大きさを求めよ。
- (3) 辺 BP の長さを求めよ。
- (4) 三角形 PQR の内接円の半径を求めよ。

問2 自然数 n に対して、 n を 3 で割った余りを a_n , n^2 を 3 で割った余りを b_n とするとき、以下の各問いに答えよ。

- (1) $\sum_{n=1}^{2016} (a_n + b_n)$ の値を求めよ。
- (2) $\sum_{n=1}^m (a_{n+2} + b_{n+1} + 2a_n) = 2016$ を満たす自然数 m の値を求めよ。

問3 O を原点とする座標平面上に、次のような双曲線 C と直線 l_k (k は実数の定数) が与えられているとき、以下の各問いに答えよ。

$$C : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = -1 \quad l_k : 3x - 4y + k = 0$$

- (1) C と l_k が接するような k の値を求めよ。
- (2) C 上の点と直線 $l_0 : 3x - 4y = 0$ の距離の最小値を求めよ。

[II] 次の関数 $f(x)$ (ただし $x > 0$) に関する以下の各問いに答えよ。

$$f(x) = \int_1^x t(x-t+1)e^{-(x-t+1)^2} dt.$$

問1 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

問2 関数 $g(x)$ を $g(x) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-x^2})$ とするとき、 $f(x)$ と $g(x)$ の $x > 0$ における大小関係を調べよ。

問3 問2の $g(x)$ に対して、傾きが $f'(x) - g'(x)$ の $x = \sqrt{2}$ における値に等しく、点 $(1, 0)$ を通る直線を考えることにより、不等式

$$0.115 < f(\sqrt{2}) < 0.165$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $0.367 < e^{-1} < 0.368$, $0.135 < e^{-2} < 0.136$ であることは用いてよい。

[III] 座標平面上の2点 $P(t, t^2)$, $Q(t-5, t^2-4t+2)$ に対して, t が $1 \leq t \leq 3$ の範囲を動くとき, 以下の各問いに答えよ。

問1 線分 PQ を表す直線の方程式および定義域を, t を用いて表せ (答えのみでよい)。

問2 線分 PQ が通過する範囲 D を求め, 図示せよ。