

平成 28 年度 入学 試験 問題 (後期)

数 学

注 意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机に出しておくこと。

数 学 (後 期)

[1]

(1) $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(2) a, b, c についての次の方程式の有理数解をすべて求めよ：

$$a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c = 0$$

(3) p, q, r についての次の方程式の有理数解をすべて求めよ：

$$(1 + \sqrt{3})p + (\sqrt{2} - 1)q + (\sqrt{3} - \sqrt{2})r = 1$$

[2] 複素数平面の原点を中心とし、半径 1 の円周を C とする。

(1) 複素数 α, β が C 上を動くとき $z = \alpha + \beta$ の値の範囲を求めよ。

(2) (1)で更に、 $\alpha, \beta, 1$ が三角形をなすようにという条件をおくとき、 z の値の範囲を求め、複素数平面に図示せよ。

[3] 数列 $\{a_n\}$ がすべての自然数 n について $0 < a_n < 1$ をみたしているとする。この数列 $\{a_n\}$ を用いて、一辺の長さが 1 の正方形 $A_0B_0C_0D_0$ から始めて、四角形 $A_nB_nC_nD_n$ ($n = 1, 2, \dots$) を次の規則で定義する。

辺 $A_{n-1}B_{n-1}, B_{n-1}C_{n-1}, C_{n-1}D_{n-1}, D_{n-1}A_{n-1}$ を $a_n : 1 - a_n$ に内分する点をそれぞれ A_n, B_n, C_n, D_n とする。
四角形 $A_nB_nC_nD_n$ の面積を S_n とし、 $T_k = \sum_{n=1}^k S_n$ とする。

(1) すべての自然数 n に対し $a_n = \frac{1}{3}$ であるとき、 $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k$ を求めよ。

(2) $n \geq 2$ とする。定数 b_1, \dots, b_n が $0 < b_i < 1$ ($i = 1, \dots, n$) をみたすとき、次の不等式を示せ。

$$(1 - b_1)(1 - b_2) \cdots (1 - b_n) > 1 - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

(3) すべての自然数 n に対し $a_n = \frac{1}{3^n}$ であるとき、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k}$ を求めよ。

[4] $P(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$ とおく。区間 $I = \left\{ \theta \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$ において、 $f_1(\theta), f_2(\theta), f_3(\theta)$ を次のように定める：

$$f_1(\theta) = P(\cos \theta), f_2(\theta) = P(f_1(\theta)), f_3(\theta) = P(f_2(\theta))$$

$f_3(\theta)$ の導関数を $f_3'(\theta)$ と表す。他の $f_1(\theta), f_2(\theta)$ に対しても同様とする。

(1) I において、 $f_1(\theta), f_2(\theta)$ それぞれの値の範囲を求めよ。

(2) $f_3'(\theta) = 0$ となる θ は $f_2'(\theta) = 0$ もみたすことを示せ。

(3) I において、 $f_3(\theta)$ の極値を求めよ。

[5] 4 枚のカードの表にそれぞれ 1, 2, 3, 4 が記されている。4 枚のカードを裏返し、よく混ぜて 1 枚を取り出し、カードに記された数を見て元に戻す。 $n \geq 2$ として、この操作を n 回繰り返すとき、取り出されたカードの数の合計を X_n とする。

(1) n 回の操作で 1, 2, 3, 4 のカードが出た回数をそれぞれ a, b, c, d 回とする。 $X_n = n + 4$ となるような a, b, c, d の組合せをすべてあげよ。

(2) $X_n = n + 4$ である確率を求めよ。

計算に使用する

計算に使用する