

一般入学試験

数 学 (70分)

I 注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は16ページあります。ただし、出題ページは下記のとおりです。
4, 6, 8, 10, 12ページ
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を挙げて監督員に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 受験番号欄
受験番号を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
 - ② 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
- 5 試験開始後30分間および試験終了前5分間は退出できません。
- 6 この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。この問題冊子は試験終了後回収します。

II 解答上の注意

- 1 「解答上の注意」が、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

受 験 番 号			

解答上の注意

解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークしなさい。

問題の文中の **ア** , **イウ** などには, 特に指示がない限り, 数字 (0~9), 符号 (-, ±), 自然対数の底 (e) のいずれかが入ります。ア, イ, ウ, …のの一つ一つが, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

なお, 解答用紙に5つある解答欄の左肩の数字は, それぞれ大問の番号を表します。

例1 **アイウ** に -83 と答えたいとき。

1	解 答 欄												
	-	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
ア	●	±	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	e
イ	⊖	±	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	●	⑨	e
ウ	⊖	±	0	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	e

分数形で解答する場合は, 既約分数で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ としして答えなさい。

1	解 答 欄												
	-	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
エ	●	±	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	e
オ	⊖	±	0	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	e
カ	⊖	±	0	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨	e

(問題は次ページから始まる)

1 次の問いに答えなさい。

(1) 実数 x, y についての式 F を

$$F = 4^{x+1} + 4^{y+1} - 2^{x+2} - 2^{y+2} - 10$$

とする。

$y = 0$ のとき、 x がすべての実数値をとるならば、 F は、 $x =$ で最小値

をとる。

また、 $y = -x$ であるとき、 $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくと、 F は t を用いて

$$F = \text{ } t^2 - \text{ } t - \text{ }$$

と表せるから、 x がすべての実数値をとるとき、 F は最小値 をとる。

(2) 関数 $f(x)$ を $f(x) = x - [x]$ とする。ただし、実数 x に対し、 $[x]$ は x を超えない最大の整数とする。

a, b を正の整数とし、2つの集合 A, B を

$$A = \{x \mid f(ax) = 0, 0 \leq x \leq 2\}$$

$$B = \{x \mid f(bx) = 0, 0 \leq x \leq 2\}$$

とする。

$f(ax) = 0$ が成り立つとき、 ax は整数であるから、集合 A, B の要素の個数をそれぞれ $n(A), n(B)$ とすると

$$n(A) = \text{ } a + \text{ }, n(B) = \text{ } b + \text{ }$$

である。

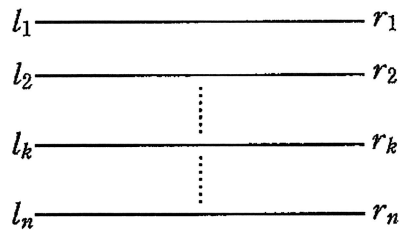
$n(A) = 131, n(B) = 183$ のとき、 $a =$, $b =$ であり、

$n(A \cap B) =$ である。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

- 2 n を正の整数とする。長さが等しい n 本のひもがある。これらに 1 本ずつ異なる番号 $1, 2, \dots, n$ をつけ、番号 k のひもの両端を l_k, r_k とし区別する。



ひもの端 $2n$ か所から無作為に 2 か所ずつ選び、それらをそれぞれ結ぶ。

例えば、 $n = 2$ の場合は、2 本のひもがつながって 1 つの輪ができるか、2 つの輪ができるかのいずれかである。

- (1) $n = 3$ のとき、すべてのひもがつながって 1 つの輪ができる確率を求める。

ひもの端 6 か所を 2 つずつ結ぶ方法は、異なる 6 個のものを 2 個ずつの 3 つの組に分ける方法に等しいから、**アイ** 通りある。

3 本のひもがつながって 1 つの輪ができる場合、 l_1 は r_1 以外と結ぶから、 l_1 を結ぶ端の選び方は、**ウ** 通り。 l_1 と l_2 を結んだとすると、 r_2 は l_3 または r_3 と結ぶから、2 通り。残った 2 か所を結ぶ方法は 1 通りとなる。

よって、3 本のひもがつながって 1 つの輪ができる結び方は、**エ** 通りである。

したがって、 $n = 3$ のとき、すべてのひもがつながって 1 つの輪ができる確率は

$\frac{\text{オ}}{\text{カキ}}$ である。

- (2) $n = 4$ のとき、すべてのひもがつながって 1 つの輪ができる確率は $\frac{\text{クケ}}{\text{コサ}}$ である。

- (3) $n = 5$ のとき、ちょうど 2 つの輪ができる確率は $\frac{\text{シス}}{\text{セソタ}}$ である。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

- 3 底面の正方形 ABCD の 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ 、高さが 1 の正四角錐 O-ABCD を考える。ただし、正四角錐とは底面が正方形で、側面がすべて合同な二等辺三角形である角錐をいう。辺 OC の中点を M、正方形 ABCD の対角線の交点を K とし、 $\vec{a} = \vec{OA}$ 、 $\vec{b} = \vec{OB}$ 、 $\vec{c} = \vec{OC}$ とする。

このとき

$$|\vec{a}| = \sqrt{\boxed{\text{ア}}}, \vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{イ}}$$

である。

線分 AM と平面 OBD の交点を N とするとき

$$\vec{ON} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \vec{OK}$$

である。

辺 OB 上に点 P を $\vec{OP} = p\vec{OB}$ ($0 < p \leq 1$) となるようにとり、辺 OD 上に点 Q を $\vec{OQ} = q\vec{OD}$ ($0 < q \leq 1$) となるようにとり、4 点 A, M, P, Q が同一平面上にあるようにする。

$$p = 1 \text{ のとき } q = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \text{ である。}$$

p がとり得る値の最小値は

$$p = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

4 点 A, M, P, Q が同一平面上にある条件から、 p と q の間に

$$\boxed{\text{ケ}} pq = p + q$$

という関係が成り立つ。

線分 PQ の長さの 2 乗は $PQ^2 = \boxed{\text{コ}} (p + q)^2 - \boxed{\text{サ}} pq$ と表せる。 $p + q$

の最小値は $\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であるから、線分 PQ の長さは $p = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ のとき、最小値

$$\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

をとる。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

4 次の問いに答えなさい。

(1) p を実数の定数とするとき、数列 $\{n^p\}$ (n は自然数) の和を

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p \text{ とおく。}$$

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \quad \cdots \text{①}$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad \cdots \text{②}$$

$$S_3(n) = \frac{1}{\boxed{\text{ア}}}n^4 + \frac{1}{\boxed{\text{イ}}}n^3 + \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}n^2 \quad \cdots \text{③}$$

である。次の方法で $S_4(n)$ を求める。

二項定理から

$$(k+1)^5 - k^5 = \boxed{\text{エ}}k^4 + \boxed{\text{オカ}}k^3 + \boxed{\text{オカ}}k^2 + \boxed{\text{エ}}k + 1$$

である。この式の k に 1 から n までを代入して得られる n 個の式の辺々をそれぞれ加えると

$$(n+1)^5 - 1^5 = \boxed{\text{エ}}S_4(n) + \boxed{\text{オカ}}S_3(n) + \boxed{\text{オカ}}S_2(n) + \boxed{\text{エ}}S_1(n) + n$$

となる。①, ②, ③より

$$S_4(n) = \frac{1}{\boxed{\text{キ}}}n^5 + \frac{1}{\boxed{\text{ク}}}n^4 + \frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}n^3 - \frac{1}{\boxed{\text{コサ}}}n$$

となる。

(2) n を 2 以上の整数とする。

1^2 から n^2 までの異なる n 個の平方数 (整数を 2 乗した数)

$$1, 4, 9, 16, 25, \cdots, n^2$$

の中から異なる 2 個の数を取り出してつくった積すべての和を T とする。

(1) の $S_p(n)$ を用いると

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\boxed{\text{シ}}} \left[\left\{ S_{\boxed{\text{ス}}}(n) \right\}^{\boxed{\text{セ}}} - S_{\boxed{\text{ソ}}}(n) \right] \\ &= \frac{1}{18}n^6 + \frac{1}{\boxed{\text{タチ}}}n^5 - \frac{5}{\boxed{\text{ツテ}}}n^4 - \frac{1}{\boxed{\text{トナ}}}n^3 + \frac{1}{72}n^2 + \frac{1}{60}n \end{aligned}$$

である。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

5 自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を, $f_n(x) = x + \log \frac{1+e^x+e^{2x}+\dots+e^{(n-1)x}}{n}$

で定める。ただし, 対数は自然対数である。

このとき

$$f_n(0) = \boxed{\text{ア}}$$

である。

数列 $\{a_n\}$ を, $a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x)}{x}$ で定める。一般に, 微分可能な関数 $g(x)$ の $x = t$ に

おける微分係数 $g'(t)$ は, $g'(t) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{g(x) - g(t)}{x - t}$ であることから

$$a_n = \frac{n + \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

となる。

よって

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \boxed{\text{エ}} - \frac{\boxed{\text{オ}}}{n + \boxed{\text{カ}}}$$

であり

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \boxed{\text{キ}}$$

である。

数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \left\{ \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{n+2}{n} \right)^2 \left(\frac{n+3}{n} \right)^3 \dots \left(\frac{n+n}{n} \right)^n \right\}^{\frac{1}{4a_n a_{n+1}}}$$

で定める。 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e^l$ とするとき

$$l = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。