

平成 29 年度
一般入学試験問題
数学 (60分)

I 注意事項

- 1 配布された問題冊子・解答用紙は、試験開始の指示があるまで開かないでください。
- 2 この問題冊子は6ページあります。(ページ番号のないページは含みません。)試験開始の合図とともにすべてのページが揃っているかどうか確認してください。
- 3 ページの脱落や重複、印刷の不鮮明な箇所があった場合には、直ちに監督者に申し出てください。
- 4 受験番号および解答は必ず解答用紙の所定の欄に記入・マークしてください。
- 5 この問題冊子の余白等は適宜利用してもかまいません。
- 6 質問、中途退室など用件のある場合は、手を挙げて申し出てください。
- 7 退室時は、問題冊子は閉じ、解答用紙は裏返しにしてください。
- 8 試験に関わるすべての用紙は、持ち帰ることはできません。

II 解答上の注意

- 1 「解答上の注意」が、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

第1問 次の問い(問1~3)に答えよ。

問1 1以上の整数 n に対して定義される a_n について $a_1 = 1$ とし、 xy 平面における曲線 $y = x^3$ 上の点 $A_n(a_n, a_n^3)$ における接線を L_n とする。直線 L_n と

x 軸の交点を $B_{n+1}(a_{n+1}, 0)$ とすると、 $a_{n+1} = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} a_n$ が成り立つ。

また、曲線 $y = x^3$ と線分 $A_n B_{n+1}$ および x 軸によって囲まれる部分の面積を

S_n とすると、 $S_1 = \frac{\text{ウ}}{\text{エオ}}$ 、 $\sum_{n=1}^x S_n = \frac{\text{カキ}}{\text{クケコ}}$ である。

問2 $z \neq -\frac{1}{2}$ である複素数 z に対して、 $w = \frac{3z+1}{2z+1}$ と定める。このとき、

z は w を用いて $z = \frac{-w + \text{サ}}{\text{シ} w - \text{ス}}$ と表される。 z が純虚数である

とき、複素数平面において w の満たす点全体は、中心が $\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$ 、半径

$\frac{\text{タ}}{\text{チ}}$ の円から2点 $\frac{\text{ツ}}{\text{テ}}$ 、 ト を除いたものである。

問3 さいころ1個を3回投げて、出た目を順に x_1, x_2, x_3 とする。 $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

が4の倍数となる確率は $\frac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$ である。また、 $x_1 + (x_2)^2 + (x_3)^3$ が4の

倍数となる確率は $\frac{\text{ヌ}}{\text{ネノ}}$ である。なお、さいころの6個の目について、

どの目の出る確率も等しいものとする。

第2問 四面体 OABC は辺の長さが $OA = 8$ 、 $OB = 9$ 、 $OC = 10$ であり、 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ 、 $\vec{OC} = \vec{c}$ とおくと、内積の値はそれぞれ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 64$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 82$ 、 $\vec{c} \cdot \vec{a} = 64$ を満たす。

また、3点 A、B、C を通る平面と点 D で接し、辺 OA、OB、OC とそれぞれ点 P、Q、R で接する球を S とし、S の中心を E とする。このとき、次の問い（問1～4）に答えよ。

問1 辺の長さは $AB = \sqrt{\text{アイ}}$ 、 $AC = \text{ウ}$ である。また、四面体 OABC の体積は $\text{エオ} \sqrt{\text{カ}}$ である。

問2 \vec{x} は \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} のそれぞれとなす角がともに θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) であり、 $|\vec{x}| = 1$ である。このとき、実数 p 、 q 、 r を用いて $\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ とおくと、 $\frac{p}{\cos \theta} = \frac{\text{キ}}{\text{クケ}}$ 、 $\frac{p}{r} = \frac{\text{コ}}{\text{サ}}$ である。

問3 S の半径は シ であり、 $\vec{OE} = \frac{\text{ス}}{\text{セソ}} \vec{a} + \frac{\text{タ}}{\text{チ}} \vec{c}$ と表される。

問4 $\vec{OQ} = \frac{\text{ツ}}{\text{テ}} \vec{b}$ である。また、四面体 OABC の体積を V_1 、四面体 OPQR の体積を V_2 とすると、 $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\text{ト}}{\text{ナニ}}$ である。

第3問 xy 平面において

$$\begin{cases} x = \sin 2\theta \\ y = \sin 3\theta \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

によって表される曲線を C とする。このとき、次の問い (問1~4) に答えよ。

問1 C 上の点を $P(x, y)$ とする。 x 座標が最大であるときの y 座標は

$\frac{\sqrt{\text{ア}}}{\text{イ}}$ である。また、 C と x 軸の共有点のうち原点ではないものを点

Q とすると、 Q は $\theta = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}\pi$ に対応する点であり、 Q における曲線 C

の接線の方程式は $y = \text{オ}x - \frac{\text{カ}\sqrt{\text{キ}}}{\text{ク}}$ である。

問2 $y^2 = \frac{\text{ケ} - \cos \text{コ} \theta}{\text{サ}}$ 、

$$y^2 \frac{dx}{d\theta} = \cos \text{シ} \theta - \frac{\text{ス}}{\text{セ}} \left(\cos \text{ソ} \theta + \cos \text{タ} \theta \right)$$

である。ただし、 $\text{ソ} < \text{タ}$ とする。

問3 C と直線 $y = x$ の共有点で原点でないものを点 $A(a, a)$ とすると、 A

は $\theta = \frac{\text{チ}}{\text{ツ}}\pi$ に対応する C 上の点であり、この値を θ_0 とおくと

$$\cos \theta_0 = \frac{\text{テ} + \sqrt{\text{ト}}}{\text{ナ}}$$

となる。また、

$$a^2 = \frac{\text{ニ} + \sqrt{\text{ヌ}}}{\text{ネ}}$$

となる。

問4 Cと直線 $y = x$ で囲まれる部分を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を V とする。 α を問3の値とすると、

$$\frac{V}{\alpha} = \frac{\boxed{\text{ノハ}} - \boxed{\text{ヒ}} \sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘホ}}} \pi \text{となる。}$$