数　学

<監督者の指示があるまで開いてはいけない>

1. 試験開始後，まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後，速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
   落丁や乱丁があった場合は，手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後，持ち帰ってもよい。
   ただし，試験途中では持ち出してはいけない。

1．次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1) 大，中，小 3 個のさいころを同時に投げるとき，それぞれのさいころの出る目を a，b，c とする。出る目に応じて，得点を次のように定める。

・$a+b<c$ のとき，得点を $(a+b+c)$ 点とする。

・$a+b \geqq c$ のとき，得点を $2(a+b+c)$ 点とする。

このとき，得点が 5 点となる確率は $\boxed{\text{(ア)}}$ であり，得点が 8 点以下となる確率は $\boxed{\text{(イ)}}$ である。

(2) $\triangle$ABC に半径 2 の円が内接し，$\cos\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{3}{5}$，$\cos\angle \mathrm{BCA} = \dfrac{5}{13}$ のとき，辺 BC の長さは $\boxed{\text{(ウ)}}$ であり，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{(エ)}}$ である。

2． m は定数で，$m>1$ とする。関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{mx}\frac{|t-e|}{t}\,dt\ (x>0)$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $f(x)$ を求めよ。また，$f(x)$ が最小値をとる x の値を a とするとき，a を m を用いて表せ。

(2) a を (1) で求めた値とする。曲線 $y=f(x)$ とその曲線上の点 $(e, f(e))$ における接線，および直線 $x=a$ で囲まれた部分の面積を $S(m)$ とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}S(m)$ を求めよ。必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。

3． 定数 p は素数とし，条件

$$a(ab-p^2)=c^2,\quad b \leqq 2c$$

をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ を考える。a が素数であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を，p を用いて表せ。

(2) $a,\ b,\ c$ の最大公約数が 1 となるような自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を，p を用いて表せ。

4. 複素数平面上の3点A(α), B(β), C(γ)は正三角形ABCをなし，$\alpha\beta\gamma = -1$をみたしている。△ABCの重心D(δ)が実軸上にあり$\delta > -1$であるとき，次の問いに答えよ。ただし，複素数平面上で複素数zを表す点PをP(z)と書く。

(1) △ABCの外接円の半径ℓをδの式で表せ。

(2) α, β, γをδの式でそれぞれ表せ。ただし，$-\pi \leqq \arg\alpha < \arg\beta < \arg\gamma < \pi$とする。ここで$\arg z$は複素数$z$の偏角を表す。